תרגול 11

היום:

- פולינום טיילור.
- טור טיילור.
- שארית של טיילור.

תזכורת:

<u>יחידות טור החזקות:</u>

יהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ותהי $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים.

יהי R רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ ונניח כי $R > 0$.

נביט בפונקציה המוגדרת על ידי $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ לכל $|x - x_0| < R$.

אזי לכל $0 \leq n \in \mathbb{Z}$, f גזירה n פעמים ב x_0 ובנוסף, $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

<u>טור טיילור:</u>

תהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ותהי f פונקציה המוגדרת בסביבה של x_0.
נניח ש f גזירה ∞ פעמים ב x_0 (כלומר $f^{(n)}(x_0)$ קיימת לכל $0 \leq n \in \mathbb{Z}$).
טור הטיילור של f סביב x_0 מוגדר להיות

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

<u>פולינום הטיילור:</u>

תהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ויהי $0 \leq N \in \mathbb{Z}$. תהי f פונקציה הגזירה N פעמים ב x_0.
פולינום הטיילור מסדר N של f סביב x_0 מוגדר להיות

$$T_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n$$

שארית הטיילור של f סביב x_0 מסדר N מוגדרת להיות

$$R_N(x) = f(x) - T_N(x)$$

הערה 3:
תהי $x \in \mathbb{R}$. אזי

$$T_f(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \lim_{N\to\infty} T_N(x)$$

ולכן $f(x) = T_f(x)$ אם ורק אם קיים הגבול $\lim_{N\to\infty} T_N(x)$
ובנוסף $f(x) = \lim_{N\to\infty} T_N(x)$.

נשים לב כי $f(x) = \lim_{N\to\infty} T_N(x)$ אם ורק אם

$$\lim_{N\to\infty} R_N(x) = \lim_{N\to\infty} (f(x) - T_N(x)) = f(x) - \lim_{N\to\infty} T_N(x) = 0$$

משפט השארית של טיילור:
תהיינה $x, x_0 \in \mathbb{R}$ כך ש $x_0 < x$ ויהי $0 \le N \in \mathbb{Z}$.
תהי f פונקציה הגזירה N פעמים ב $[x_0, x]$.
נניח כי

1. $f^{(N)}$ רציפה ב $[x_0, x]$.
2. $f^{(N)}$ גזירה ב (x_0, x).

אזי קיימת $x_0 < c < x$ שעבורה

$$R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!} \cdot (x-x_0)^{N+1}$$

הערה:
המשפט נכון גם אם $x_0 > x$.

משפט:
תהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ותהי $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים.
נביט בטור החזקות

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ...$$

יהי $x \in \mathbb{R}$. אם טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ מתכנס ב x, אזי טור החזקות שמתקבל על ידי אינטגרציה איבר איבר, כלומר הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \cdot (x-x_0)^{n+1}}{n+1}$ מתכנס גם ב x.

דוגמאות:

1. מצאו את טור טיילור של $f(x)=\frac{x}{2+x}$ המוגדרת לכל $x\neq -2$ סביב $x_0=1$ וחשבו את תחום ההתכנסות של הטור.

פתרון:
יש לנו שתי אפשרויות: למצוא נוסחה ל $f^{(n)}(1)$ לכל $0\leq n\in\mathbb{Z}$ או להיעזר בטור גיאומטרי.

נפתור תחילה בעזרת טור גיאומטרי

$$f(x)=\frac{x}{2+x}=\frac{x-1+1}{3+x-1}=(x-1)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}=$$

$$=\frac{1}{3}(x-1)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{3}\right)^n+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{3}\right)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{3}\right)^{n+1}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{3}\right)^n=$$

נבצע החלפת שמות אינדקסים רק עבור הטור הראשון בעזרת $k=n+1$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(\frac{x-1}{3}\right)^k+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{3}\right)^n=$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)\cdot(-1)^k}{3^k}(x-1)^k+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-1)^n$$

אזי $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ בתחום ההתכנסות כאשר

$$a_n=\begin{cases}\frac{(-1)\cdot(-1)^n}{3^n}+\frac{(-1)^n}{3^{n+1}} & \forall n\in\mathbb{N}\\ \frac{1}{3} & n=0\end{cases}$$

נעשה מכנה משותף לחלק העליון ונקבל

$$a_n=\begin{cases}\frac{-2\cdot(-1)^n}{3^{n+1}} & \forall n\in\mathbb{N}\\ \frac{1}{3} & n=0\end{cases}$$

כאשר תחום ההתכנסות הוא

$$\left|-\frac{x-1}{3}\right|<1\Rightarrow\ -2<x<4$$

ממשפט היחידות נוכל לומר שזהו טור הטיילור של f.
היות שעבדנו עם טור גיאומטרי, נוכל לומר שגם הטור שווה לפונקציה.

בעזרת גזירה נקבל (נזכור כי $x_0 = 1$ ו $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ לכל $0 \leq n \in \mathbb{Z}$) שלכל $x \neq -2$:

$$f(x) = \frac{x}{2+x} \Rightarrow f(1) = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} \Rightarrow a_0 = \frac{\frac{1}{3}}{0!} = \frac{1}{3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(2+x)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{2}{(2+1)^2} = \frac{2}{3^2} \Rightarrow a_1 = \frac{\frac{2}{3^2}}{1!} = \frac{2}{3^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2\cdot 2}{(2+x)^3} \Rightarrow f''(1) = \frac{-2\cdot 2}{(2+1)^3} = \frac{-2\cdot 2}{3^3} \Rightarrow a_2 = \frac{-\frac{2\cdot 2}{3^3}}{2!} = -\frac{2}{3^3}$$

$$f'''(x) = \frac{2\cdot 2\cdot 3}{(2+x)^4} \Rightarrow f'''(1) = \frac{2\cdot 2\cdot 3}{(2+1)^4} = \frac{2\cdot 2\cdot 3}{3^4} \Rightarrow a_3 = \frac{\frac{2\cdot 2\cdot 3}{3^4}}{3!} = \frac{2}{3^4}$$

בכל פעם שנגזור החזקה של המכנה תגדל ב 1, הסימן יתחלף, והמונה יוכפל בחזקה של המכנה לפני הגזירה. לאחר מכן נחלק ב $n!$ ואחרי צמצום ישאר במונה רק 2 עם סימן מתחלף.

ניתן להראות באינדוקציה שהנוסחה היא בדיוק כמו שראינו בטור הגיאומטרי, כלומר

$$a_n = \begin{cases} \frac{-2\cdot(-1)^n}{3^{n+1}} & \forall n \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{3} & n = 0 \end{cases}$$

אזי $T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ לכל $-2 < x < 4$ (ניתן למצוא את תחום ההתכנסות על ידי נוסחת המנה).
הפעם לא נוכל לומר שהטור שווה לפונקציה, כי לא הוכחנו שהשארית שואפת לאפס.

2. מצאו את פולינום טיילור מסדר 4 של $f(x)=\sqrt{x}$ המוגדרת לכל $x\geq 0$ סביב $x_0=1$.
הוכיחו ש $R_4(2)<\frac{7}{256}$ ו $\left|R_4\left(\frac{1}{2}\right)\right|<\frac{7}{256}$.

פתרון:
תחילה נמצא את הנגזרות של הפונקציה עד סדר חמישי. לכל $x>0$ מתקיים

$$f^{(0)}(x)=x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f^{(0)}(1)=1$$

$$f^{(1)}(x)=\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow f^{(1)}(1)=\frac{1}{2}$$

$$f^{(2)}(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\Rightarrow f^{(2)}(1)=-\frac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}\Rightarrow f^{(3)}(1)=\frac{3}{8}$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}\cdot x^{-\frac{7}{2}}\Rightarrow f^{(4)}(1)=-\frac{15}{16}$$

$$f^{(5)}(x)=\frac{105}{32}\cdot x^{-\frac{9}{2}}$$

לכן פולינום טיילור מסדר 4 של $\sqrt{x}$ סביב $x_0=1$ הוא

$$T_4(x)=\sum_{n=0}^{4}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}\cdot(x-1)^n=$$

$$1+\frac{x-1}{2\cdot 1!}-\frac{(x-1)^2}{4\cdot 2!}+\frac{3}{8}\cdot\frac{(x-1)^3}{3!}-\frac{15}{16}\cdot\frac{(x-1)^4}{4!}=$$

$$1+\frac{x-1}{2}-\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(x-1)^3}{16}-\frac{5\cdot(x-1)^4}{128}$$

כעת נעריך את השארית של הפולינום מסדר רביעי.

עבור $x=2$:
ממשפט השארית של טיילור קיים $1<c<2$ כך ש

$$R_4(2)=\frac{f^{(5)}(c)}{5!}\cdot(2-1)^5=\frac{\frac{105}{32}\cdot c^{-\frac{9}{2}}}{5!}\cdot(2-1)^5=\frac{7}{256c^{\frac{9}{2}}}\underset{c>1}{<}\frac{7}{256}$$

לכן נוכל לומר כי השגיאה קטנה מ $\frac{7}{256}$.

כלומר

$$|\sqrt{2}-T_4(2)|<\frac{7}{256}$$

כאשר

$$T_4(2)=1+\frac{2-1}{2}-\frac{(2-1)^2}{8}+\frac{(2-1)^3}{16}-\frac{5\cdot(2-1)^4}{128}$$

עבור $x=\frac{1}{2}$:
ממשפט השארית של טיילור קיים $\frac{1}{2}<c<1$ כך ש

$$\left|R_4\left(\tfrac{1}{2}\right)\right|=\left|\tfrac{f^{(5)}(c)}{5!}\cdot\left(\tfrac{1}{2}-1\right)^5\right|=\left|\tfrac{\frac{15\cdot 7}{32}\cdot c^{-\frac{9}{2}}}{5!}\cdot\left(\tfrac{1}{2}-1\right)^5\right|=\frac{7}{256c^{\frac{9}{2}}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\underset{c>\frac{1}{2}}{<}$$

$$\frac{7}{256\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{9}{2}}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{7}{256}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\underset{\sqrt{\frac{1}{2}}<1}{<}\frac{7}{256}$$

לכן נוכל לומר כי השגיאה קטנה מ $\frac{7}{256}$.
כלומר

$$\left|\sqrt{\frac{1}{2}}-T_4\left(\frac{1}{2}\right)\right|<\frac{7}{256}$$

כאשר

$$T_4\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{\frac{1}{2}-1}{2}-\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}{8}+\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)^3}{16}-\frac{5\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)^4}{128}$$

3. חשבו את $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ עם שגיאה שלא עולה על $\frac{1}{9!\cdot 9}$,

כלומר מצאו $\alpha \in \mathbb{Q}$ כך ש $|\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx - \alpha| \leq \frac{1}{9\cdot 9!}$.

פתרון:
נשתמש בטור טיילור ונקבל

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} dx}{x} dx \right) = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n} dx \right) =$$

נבצע אינטגרציה איבר איבר ונקבל

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^1 x^{2n} dx =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}$$

כעת נרצה למצוא כמה איברים עלינו לסכום על מנת שהשגיאה לא תעלה על $\frac{1}{9!\cdot 9}$.

נשים לב שהטור שקיבלנו הוא טור מהצורה של לייבניץ!
תזכורת: יהי $\sum_{n=k}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ זנב של טור לייבניץ, אז הטור מתכנס לערך $s \in \mathbb{R}$ ומתקיים

$$a_k - a_{k+1} \leq |s| \leq a_k$$

ננסה להציב מספר איברים לסכום על מנת להבין את החוקיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot(2n+1)!} = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + \frac{1}{9\cdot 9!} - \frac{1}{11\cdot 11!} + \frac{1}{13\cdot 13!} + \ldots$$

אז

$$\left| \tfrac{1}{9\cdot 9!} - \tfrac{1}{11\cdot 11!} + \tfrac{1}{13\cdot 13!} + \ldots \right| \leq \frac{1}{9\cdot 9!}$$

לכן קיבלנו

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + \text{error}$$

כאשר השגיאה חסומה על ידי $\frac{1}{9!\cdot 9}$, כלומר

$$\alpha = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!}$$

ו $\alpha \in \mathbb{Q}$ מסגירות הרציונליים.